Petri-Netze

Definition

Ein Informationssystem ist ein System, das einem Benutzer beim Auffinden, Speichern und Verarbeiten von Informationen unterstützt.

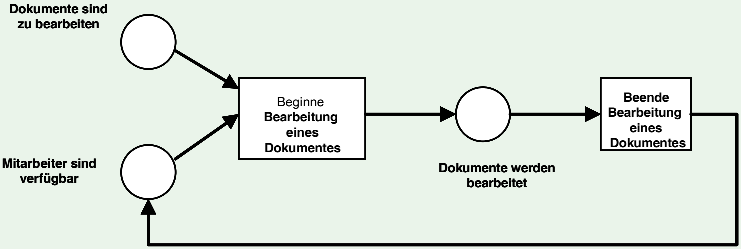
- Diese primär *datenorientierte* Sicht eines Informationssystems wird seit einigen Jahren durch eine mehr *prozessorientierte* Sicht ersetzt, in der die Geschäftsprozesse eines Unternehmens im Mittelpunkt stehen.
- Unter *Business Process Management* versteht man den Entwurf, die Durchführung (*enactment*), Verwaltung und Analyse der Geschäftsprozesse.
- Ein Workflow ist eine Abstraktion eines Geschäftsprozesses, die vor allem auf den Fluss digitalisierter Dokumente bzw. Objekte gerichtet ist und menschliche Aktivitäten bzw. Entscheidungen auf Interaktionen mit Anwendungssystemen reduziert.
- Als Formalismus zur Behandlung von Workflows werden Petri-Netze diskutiert, die eine intuitive graphische Darstellung besitzen und einer weitgehenden formalen Analyse zugänglich sind.
  - S/T-Netze und gefärbte Petri-Netze
  - Entwurfsmuster,
  - formale Analyse von S/T-Netzen,
  - Petri-Netz-basierte Workflow-Sprachen.

Literatur

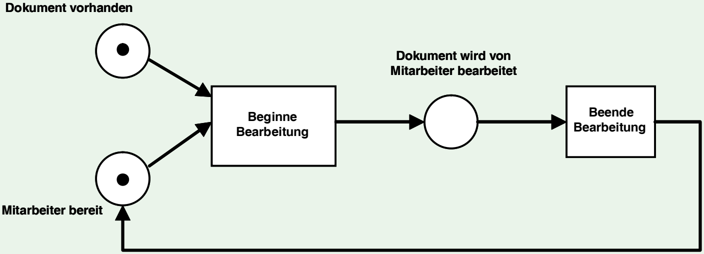
- L. Priese, H. Wimmel. Petri-Netze, Springer Verlag 2003.
- B. Baumgarten. Petri-Netze: Grundlagen und Anwendungen, Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- Tadao Murata. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4, April 1989
- P.H. Starke. Analyse von Petri-Netz-Modellen, Teubner 1990

Petri-Netze sind abstrakte Modelle des Informations- und Objektflusses, die es gestatten, Systeme und Prozesse auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen und damit in unterschiedlicher Detailliertheit in einer einheitlichen Sprache zu beschreiben.

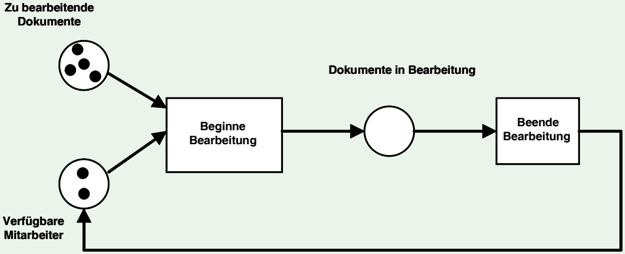
Beispiel Kanal/Instanz-Netz



Beispiel Bedingungs/Ereignis-Netz



Beispiel Stelle/Transition-Netz

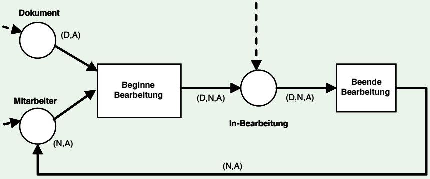


Beispiel Prädikat/Transition-Netz

Dokument#	Arbeitsschritt
d1	a1
d1	a2
d1	a4
d2	a3
d3	a1

Dokument#	Name	Arbeitsschritt
d2	n2	a1

Name	Arbeitsschritt
n1	a1
n1	a3
n2	a2
n3	a4



Petri-Netze können zur Repräsentation von dynamischen Zusammenhänge verwendet werden; im wesentlichen werden modelliert

- durch Aktivitäten verursachte Zustandsübergänge (möglicherweise strukturierter) Objekte,
- hierbei notwendige Kontrollstrukturen.

Vorzüge

- Einheitlichkeit der Beschreibungssprache für unterschiedliche Abstraktionsebenen,
- Möglichkeit zur Modellierung sequentieller, sich gegenseitig ausschließender sowie kausal unabhängiger (nebenläufiger, paralleler, nondeterministischer) Aktivitäten, wobei die Nebenläufigkeit Beschränkungen unterliegen kann,
- Möglichkeit zur formalen Analyse, Verifikation und Simulation, teilweise unterstützt durch entsprechende Softwarepakete,
- graphische intuitive Darstellung aufbauend auf einfachen, verständlichen Grundbausteinen.

Die Anwendung von Petri-Netzen ist auf diskrete bzw. diskretisierbare Systeme beschränkt.

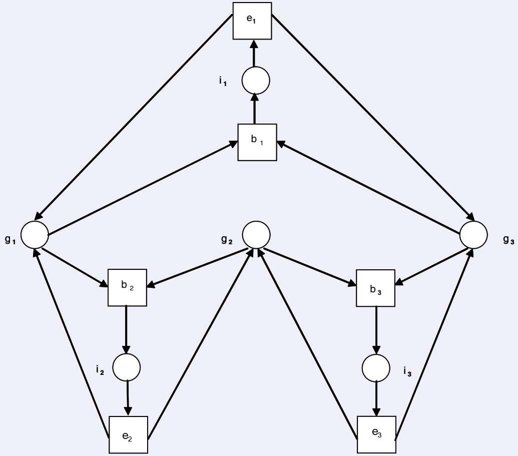
S/T-Netze

Grundelemente eines S/T-Netzes

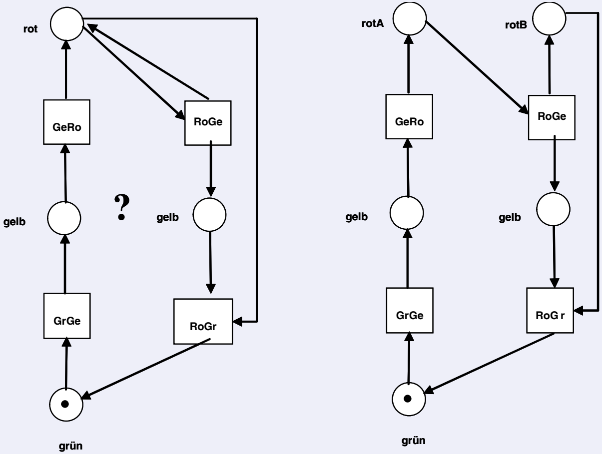
- *Stellen (Plätze)*, graphisch dargestellt durch einen Kreis. Stellen können *Marken* enthalten, die graphisch durch einen Punkt, dargestellt werden.
- *Transitionen (Ereignisse)*, graphisch dargestellt durch ein Rechteck.
- *Kanten*, graphisch dargestellt durch eine gerichtete Kante. Kanten können mit *Vielfachheiten* beschriftet sein.
- *Stellen* stehen für Zustandsgrößen des modellierten Systems.
- Die *Markierung* einer Stelle durch Marken beschreibt einen Zustand durch den aktuellen Bestand an Ressourcen (Objekten), bzw. Stand der Erfülltheit von Systembedingungen.
- *Transitionen* stehen für Aktivitäten (Systemereignisse) und *Kanten* repräsentieren einen Kausalzusammenhang. Die *Vielfachheiten* an den Kanten geben den Verbrauch, bzw. die Erzeugung von Ressourcen (Objekten) an, die beim *Stattfinden (Schalten, Feuern)* der betreffenden Aktivität anfallen.

3-Philosophen-Problem

b_j: Philosoph beginnt zu essen; e_j: Philosoph hört auf zu essen;
i_j: Philosoph ißt; g_j: Gabel liegt auf dem Tisch;
$1 \leq j \leq 3$.

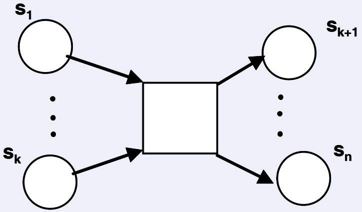


Farbübergänge einer Ampel



Das *Stattfinden* einer Transition hat lokale Auswirkungen auf die Markierungen (der mit ihnen verbundenen Stellen); eine Transition kann nur unter bestimmten Anforderungen an ihre Umgebung stattfinden.

Unter der *Umgebung* einer Transition t versteht man die Transition zusammen mit allen mit ihr verbundenen Stellen:



$s_1, \ldots, s_k$ bezeichnet man als *Vorbedingungen (Vorstellen)*, $s_{k+1}, \ldots, s_n$ als *Nachbedingungen (Nachstellen)*.

Ist eine Stelle gleichzeitig Vor- und Nachstelle, so redet man von einer *Schleife*.

Ein *Netz* ist ein Tripel $N = (S, T, F)$, wobei

- S, die Menge der *Stellen*, und T, die Menge der *Transitionen*, nicht-leere endliche disjunkte Mengen,
- $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$, die Menge der Kanten genannt *Flußrelation*, eine binäre Relation derart, dass $dom(F) \cup cod(F) = S \cup T$.

Sei $N = (S, T, F)$ ein Netz und $x \in S \cup T$.

$$xF := \{y \mid (x, y) \in F\}$$
$$Fx := \{y \mid (y, x) \in F\}$$

sF sind die *Nachtransitionen* von s; Fs sind die *Vortransitionen* von s; tF sind die *Nachstellen* von t; Ft sind die *Vorstellen* von t.

Sei $N = (S, T, F)$ ein Netz. Jede Abbildung m von der Stellenmenge S in die Menge NAT der natürlichen Zahlen wird als *Markierung* von S bezeichnet. Eine Abbildung $S \rightarrow NAT \cup \{\omega\}$ heißt ω-*Markierung*. Der Wert ω repräsentiert eine unendlich große Anzahl Marken.
Rechnen mit ω:

$$\omega - n = \omega, \omega + n = \omega, n \cdot \omega = \omega, 0 \cdot \omega = 0, \omega > n$$

wobei $n \in NAT, n > 0$.
Eine *Markierung* beschreibt einen denkbaren Systemzustand.

Ein *S/T-Netz* ist ein Quintupel $N = (S, T, F, V, m_0)$, wobei

- (S, T, F) ein Netz,
- $V : F \rightarrow NAT^+$ die *Vielfachheit*,
- m_0 eine Markierung genannt *Startmarkierung*.

N heißt *gewöhnliches* S/T-Netz, wenn $V(f) = 1, \forall f \in F$.

Transitionen können Zustandsübergänge verursachen, sofern ihre Vorbedingungen erfüllt sind. In diesem Fall sagt man, die Transition hat Konzession.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, m eine Markierung und $t \in T$ eine Transition.

- *t hat Konzession bei der Markierung m*, wenn für alle Vorstellen $s \in Ft$ gilt:

$$m(s) \geq V(s,t).$$

- Wenn t Konzession bei m hat, dann *kann t bei m schalten*. Durch Schalten von t bei m entsteht die Markierung m', $m[\,t \succ m'$, wobei für $s \in S$ gilt:

$$m'(s) := \begin{cases} m(s) - V(s,t) + V(t,s) & \text{falls } s \in Ft, s \in tF, \\ m(s) - V(s,t) & \text{falls } s \in Ft, s \notin tF, \\ m(s) + V(t,s) & \text{falls } s \notin Ft, s \in tF, \\ m(s) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vektordarstellung

Wir unterstellen eine lineare Ordnung auf der Menge der Stellen.
Markierungen werden bei Bedarf als *(Stellen-) Vektoren* geschrieben.
Für *Transitionen* unterscheiden wir zunächst die Abbildungen $\Delta t, t^+, t^-$.
Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, $s \in S$ und $t \in T$.

$$t^+(s) := \begin{cases} V(t,s) & \textit{falls } s \in tF, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$t^-(s) := \begin{cases} V(s,t) & \textit{falls } s \in Ft, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$\Delta t(s) := t^+(s) - t^-(s).$$

$\Delta t, t^+, t^-$ werden bei Bedarf als *(Stellen-) Vektoren* geschrieben.
Δt gibt die durch das Schalten von t bewirkte globale Zustandsänderung an.
Jetzt kann mit Markierungen wie mit Vektoren gerechnet werden:

- $(m \pm \Delta t)(s) = m(s) \pm \Delta t(s)$
- $m \leq m'$, falls $m(s) \leq m'(s)$ für $\forall s \in S$,
- $m < m'$, falls $m \leq m'$, jedoch $m \neq m'$.

Damit folgt:

- t hat Konzession bei m gdw. $t^- \leq m$,
- $m[\, t \succ m'$ gdw. $t^- \leq m, m' = m + \Delta t$.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz.
Sei $W(T)$ die Menge aller endlichen Folgen (Wörter) von Elementen aus T, darunter das leere Wort ϵ. Die Länge eines Wortes q sei $l(q)$; das leere Wort hat die Länge 0.
Seien m, m' Markierungen von S und sei $q \in W(T)$. Die Relation $m[\,q \succ m'$ ist dann induktiv definiert wie folgt:

- $m[\,\epsilon \succ m'$ gdw. $m = m'$,
- Sei $t \in T, q \in W(T)$. $m[\,qt \succ m'$ gdw. $\exists m'' : m[\,q \succ m''$, $m''[\,t \succ m'$.

Die *Erreichbarkeitsrelation* $[\,* \succ$von N ist definiert zu

$$m[\,* \succ m' \text{ gdw. } \exists q : q \in W(T), m[\,q \succ m'.$$

m' heißt dann erreichbar von m in N.

Sei:

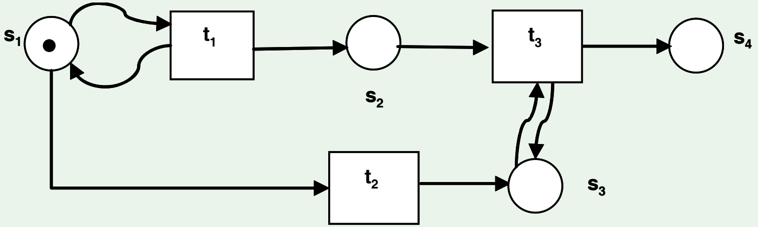
- $R_N(m) := \{m' \mid m[*\succ m'\}$, die Menge aller von m in N erreichbaren Markierungen,
- $L_N(m) := \{q \mid \exists m' : m[\,q \succ m'\}$, die Menge aller schaltbaren Transitionswörter in N ausgehend von m,
- $\Delta q := \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$, wobei $q = t_1 t_2 \dots t_n$.

Folgerungen

- $[*\succ$ ist reflexiv und transitiv.
- $m[\,q \succ m' \Rightarrow (m + m^*)[\,q \succ (m' + m^*), \forall m^* \in NAT^{|S|}$. (Monotonie)
- $m[\,q \succ m' \Rightarrow m' = m + \Delta q$.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Der *Erreichbarkeitsgraph* von N ist der Graph $EG(N) := (R_N(m_0), B_N)$. Die Menge der Knoten ist $R_N(m_0)$ und die Menge der beschrifteten Kanten ist B_N wie folgt:

$$B_N = \{(m, t, m') \mid m, m' \in R_N(m_0), t \in T, m[\, t \succ m'\}.$$



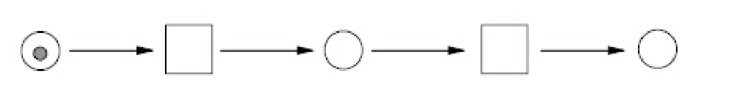
$$
\begin{aligned}
R_N(m_0) = \{ \quad & (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,2,0,0), (1,3,0,0), \ldots, \\
& (0,0,1,0), (0,1,1,0), (0,2,1,0), (0,3,1,0), \ldots, \\
& (0,0,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,2), (0,2,1,1), (0,1,1,2), (0,0,1,3), \ldots\} \\
L_N(m_0) = \{ \quad & \epsilon, t_1, t_1 t_1, t_1 t_1 t_1, \ldots, \\
& t_2, t_1 t_2, t_1 t_1 t_2, t_1 t_1 t_1 t_2, \ldots, \\
& t_1 t_2 t_3, t_1 t_1 t_2 t_3, t_1 t_1 t_2 t_3 t_3, t_1 t_1 t_1 t_2 t_3, t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 t_3, t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 t_3 t_3, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Modellierung mit S/T-Netzen

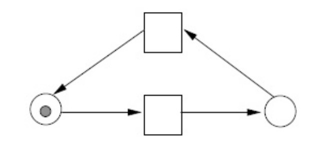
- S/T-Netze sind zur Repräsentation *kausaler Zusammenhänge* geeignet; für zeitliche Zusammenhänge existieren entsprechende Erweiterungen.
- *Wenn zwischen Aktivitäten keine kausalen Zusammenhänge existieren, dann nennt bezeichnet man sie als nebenläufig.* Nebenläufigkeit ist eine Voraussetzung für Parallelität.

Einige typische Kausalstrukturen

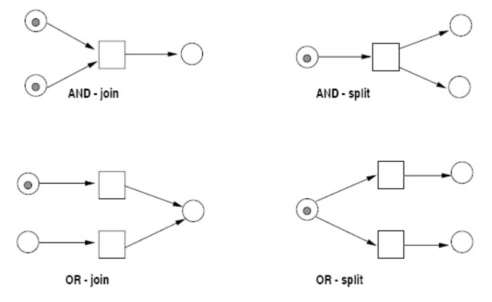
Sequenz/Kausalität



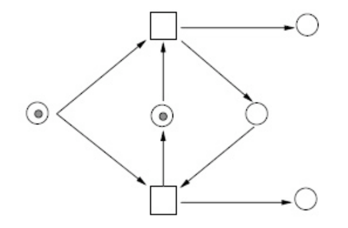
Iteration



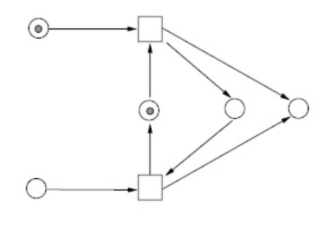
AND-join, OR-join, AND-split, OR-split



Verzweigungskonflikt (OR-Split) mit Regulationskreis



Verzweigungskonflikt (OR-Join) mit Regulationskreis

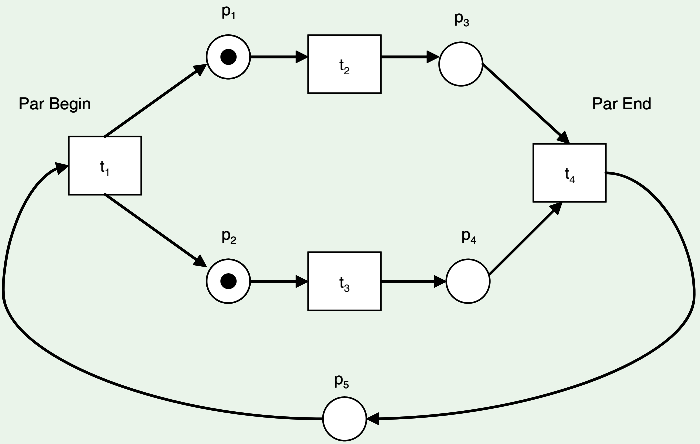


Nebenläufigkeit

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, $U \subseteq T$, m eine Markierung.

- U heißt *nebenläufig bei* m, wenn für $U^- := \sum_{t \in U} t^-$ gilt: $U^- \leq m$.
- U heißt *konfliktbehaftet bei* m, wenn alle $t \in U$ bei m Konzession haben und U nicht nebenläufig bei m. Falls $U = \{t, t'\}$, dann *stehen* t *und* t' *bei* m *in Konflikt.*
- N heißt *(dynamisch) konfliktfrei* oder *persistent*, wenn bei keiner erreichbaren Markierung zwei Transitionen in Konflikt stehen.

zur Persistenz



Analyse von S/T-Netzen

Beschränktheit

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, m eine Markierung, $s \in S$.

- Sei $k \in NAT^+$. s heißt *k-beschränkt*, wenn für jede Markierung m' gilt:

$$m' \in R_N(m_0) \Rightarrow m'(s) \leq k.$$

- s heißt *beschränkt*, wenn s k-beschränkt für ein $k \in NAT^+$.
- N heißt *beschränkt (k-beschränkt)*, wenn jede Stelle beschränkt (k-beschränkt).
- Ein S/T-Netz heißt *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist. Stellen eines sicheren Netzes können als logische Bedingungen interpretiert werden.

Satz

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. N ist nicht beschränkt (unbeschränkt) genau dann, wenn $r \in W(T)$, $m, m' \in R_N(m_0)$ existieren, sodass $m[\, r \succ m'$ und $m' > m$.

Beweis: Zum Beweis wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma

In jeder unendlichen Folge (m_i) von Markierungen existiert eine unendliche Teilfolge (m'_j), die schwach monoton steigt, d.h. für $l < k$ ist $m'_l \leq m'_k$.

Beweis: Man sondere zunächst eine unendliche Teilfolge von (m_i) aus, die das Monotoniekriterium bzgl. der ersten Komponente erfüllt. Aus dieser Teilfolge sondere man dann eine unendliche Teilfolge aus, die das Monotoniekriterium zusätzlich bzgl. der zweiten Komponente erfüllt, usw.

Beweis des Satzes $\Leftarrow$

Seien $r \in W(T)$, $m, m' \in R_N(m_0)$, so daß $m[\,r\succ m'$ und $m' > m$. Es gilt dann

$$m[\,r\succ m'[\,r\succ m''[\,r\succ m''' \ldots,$$

wobei $m < m' < m'' < m''' < \ldots$. Da die Schaltfolge r beliebig oft hintereinander stattfinden kann, ist mindestens eine Stelle unbeschränkt.

Beweis des Satzes $\Rightarrow$

- Betrachte den Erreichbarkeitsgraphen $EG(N)$. $EG(N)$ hat unendlich viele Knoten. Von m_0 aus existiert zu jedem Knoten des Graphen ein (gerichteter) Pfad. Jeder Knoten hat nur endlich viele Nachfolger.
- Somit beginnen bei m_0 unendlich viele Pfade (die keinen Knoten mehrmals enthalten), aber nur endlich viele Kanten. Durch eine dieser Kanten müssen somit unendlich viele dieser Pfade gehen. Sei m_1 der Endknoten einer solchen Kante.
- Wende dann dieselbe Argumentation bzgl. m_1 an und sei der entsprechende Endknoten der ausgewählten Kante m_2. Diese Konstruktion bricht nicht ab. Somit existiert eine unendliche Folge (m_i) von paarweise verschiedenen erreichbaren Markierungen, so dass für m_k, m_l, $0 \leq k \leq l$ gilt:

  $$m_0[\,*\succ m_k[\,*\succ m_l.$$

  Betrachte dann die nach Lemma existierende schwach monoton aufsteigende Teilfolge (m'_j) von (m_i). Seien m'_1, m'_2 zwei aufeinanderfolgende Elemente dieser Folge. Es gilt nach Konstruktion $m'_1 < m'_2$. Somit gilt auch $m_0[\,*\succ m'_1[\,*\succ m'_2$, was zu beweisen war.

Erreichbarkeit

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, $m \in NAT^{|S|}$ eine Markierung. Die Beantwortung der Frage:

$$m \in R_N(m_0)?$$

bezeichnet man als das *Erreichbarkeitsproblem*.

- Das Erreichbarkeitsproblem ist entscheidbar, jedoch bereits für beschränkte Netze hyperexponentiell in der Länge der Eingabe (d.h. in der Länge des Netzes N).
- *Ist die Komplexität abhängig von der zu testenden Markierung?*
- Betrachte die *Nullmarkierung*, d.h. eine Markierung, deren Markenzahl an allen Stellen 0 ist.

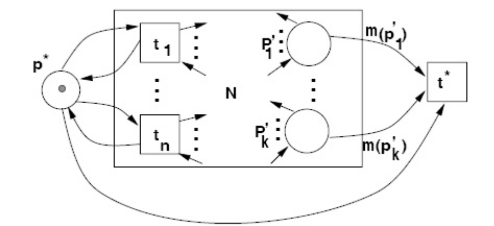
Satz

Das Erreichbarkeitsproblem kann auf das Problem der Erreichbarkeit der Nullmarkierung reduziert werden.

Beweis: Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein beliebiges S/T-Netz, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $m \in NAT^{|S|}$ eine beliebige Markierung und $S' = \{s'_1, \ldots, s'_k\} = \{s \mid m(s) > 0\}$.

Sei $N^* = (S^*, T^*, F^*, V^*, m_0^*)$ ein zu N wie folgt konstruiertes S/T-Netz:

- $S^* = S \cup \{s^*\}$, $T^* = T \cup \{t^*\}$,
- $m_0^*(s^*) = 1$ und m_0^* sonst wie m_0.



Es gilt dann: $m \in R_N(m_0)$ genau dann, wenn $0 \in R_{N^*}(m_0^*)$.[1]

[1] Beachte für die Notwendigkeit, dass ohne s^* eine Nullmarkierung auch ohne Schalten von t^* erreichbar sein kann.

Überdeckbarkeit

Überdeckungsgraph

Wenn anstatt der Erreichbarkeit einer Markierung die Überdeckbarkeit genügt, dann kann als Grundlage für Analysen eine endliche Repräsentation des Erreichbarkeitsgraphen, der sogenannte Überdeckungsgraph, verwendet werden.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz und seien m, m' Markierungen von N.

- wenn $m \leq m'$, dann heißt m von m' *überdeckt*,
- m heißt *überdeckbar* in N, wenn eine in N erreichbare Markierung m' existiert, die m überdeckt.

Ist eine Markierung nicht überdeckbar, dann ist sie insbesondere nicht erreichbar.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Der *Überdeckungsgraph* von N ist der Graph *ÜG(N)* $:= (R, B)$.

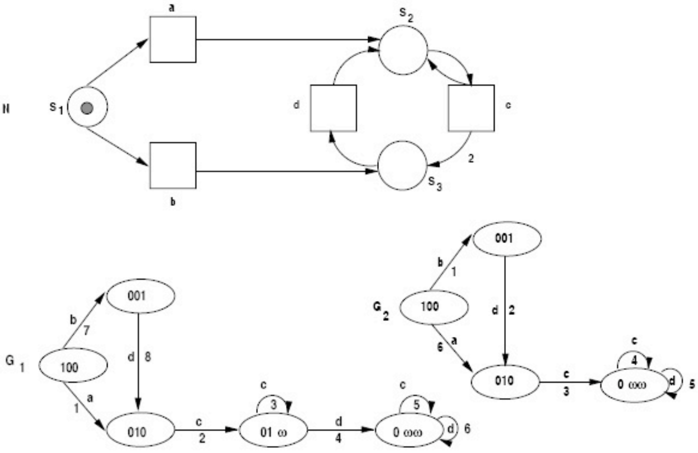
- *induktive Definition eines Hilfsbaumes $T(N)$:*

  Die Inhalte der Knoten von $T(N)$ sind ω-Markierungen von N. m_0 wird der Wurzel des Baumes zugewiesen. Sei m Inhalt eines Knoten des Baumes, $t \in T$, und $m[\, t \succ m'$.

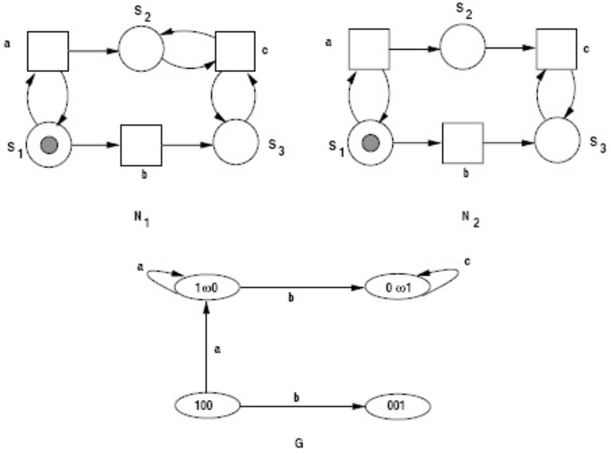
  - Wenn auf dem Weg von der Wurzel zu dem Knoten mit Markierung m ein Knoten mit Markierung m'' liegt, so daß $m'' < m'$, dann setze $m'(s) := \omega$ für alle Stellen s, für die $m''(s) < m'(s)$.
  - Nimm einen neuen Knoten mit Inhalt m' in den Baum auf und bewerte die neue Kante mit der Transition t.
  - Existiert bereits ein anderer Knoten im Baum mit Inhalt m', dann wird der neue Knoten mit Inhalt m' für den weiteren Aufbau des Baumes nicht mehr berücksichtigt.

- *Bildung des Überdeckungsgraphen:* Die Knoten von *ÜG(N)* sind die ω-Markierungen in den Knoten des Baumes $T(N)$. Seien $m, m' \in R$. B enthält eine mit t beschriftete Kante von m nach m', wenn eine entsprechende Kante zwischen zwei Knoten in $T(N)$ existiert, wobei der Startknoten der Kante m und der Zielknoten der Kante m' als Inhalt hat.

Ein S/T-Netz mit zwei Überdeckungsgraphen.



Zwei S/T-Netze mit demselben Überdeckungsgraphen.



Satz

Für jedes S/T-Netz N ist der Überdeckungsgraph $\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{G}(N) = (R, B)$ endlich.

Beweis:
Angenommen $\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{G}(N)$ ist nicht endlich. Dann muß $\ddot{\mathrm{U}}\mathrm{G}(N)$ und $T(N)$ unendlich viele Knoten enthalten. Daraus folgt die Existenz einer unendlichen, schwach monoton aufsteigenden Folge von ω-Markierungen in $T(N)$, deren Elemente paarweise verschieden sind.

Eine solche Folge kann jedoch nach Aufbau von $T(N)$ nicht existieren. Denn, seien m_i, m_j zwei aufeinanderfolgende Elemente in dieser Folge. Dann gilt $m_i < m_j$. D.h. jedoch, daß m_j ein zusätzliches ω-Symbol enthält. Da die Anzahl Stellen endlich ist, können in der Folge nicht unendlich viele paarweise verschiedene Markierungen existieren.

- Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Jedem Pfad in $\ddot{U}G(N)$ kann ein Wort aus Transitionen zugeordnet werden, das sich aus der Konkatenation der entsprechenden Kantenbeschriftungen ergibt.
- Die Menge aller solchen Wörter, die sich bzgl. aller in m_0 beginnenden Pfade ergibt, sei $L_{\ddot{U}G}(N)$.
- Sei $q \in L_{\ddot{U}G}(N)$. Sei m_q diejenige ω-Markierung, die mittels q erreicht werden kann.

Satz

(1) Wenn m erreichbar in N, d.h. $m_0[\, q \succ m$, dann $q \in L_{\text{ÜG}}(N)$ und $m \leq m_q$.

(2) Wenn m überdeckbar in N, dann existiert ein Knoten in ÜG(N), der m überdeckt.

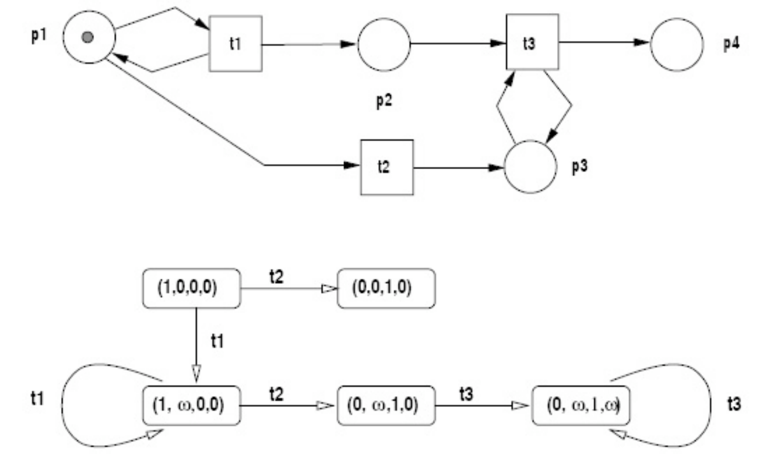
Beweis:

(1) Induktion

- Sei $q_0 = \epsilon$. $m = m_0 = m_\epsilon$.
- Sei $q_n = q_{n-1}t$. Da $m_0[\, q_{n-1}t \succ m$ existiert eine Markierung m^*: $m_0[\, q_{n-1} \succ m^*[\, t \succ m$. Nach Induktionsannahme folgt: $m_0[\, q_{n-1} \succ m^* \Rightarrow q_{n-1} \in L_{\text{ÜG}}(N), m^* \leq m_{q_{n-1}}$. Wegen $m^*[\, t \succ m$ hat t Konzession bei m^* und damit auch bei $m_{q_{n-1}}$. Also $q_{n-1}t \in L_{\text{ÜG}}(N)$ und $m_{q_{n-1}t} \geq m_{q_{n-1}} + \Delta t \geq m^* + \Delta t = m$.

(2) Sei $m' \in R_N(m_0)$ die m überdeckende Markierung. Wegen (1) existiert $q \in L_{\text{ÜG}}(N)$ so daß $m' \leq m_q$. Damit aber auch $m \leq m_q$.

Die Markierung $m = (0, 3, 1, 3)$ ist überdeckbar; sie ist sogar erreichbar, da sie ausgehend von m_0 durch Schalten des Wortes $q = t_1^6 t_2 t_3^3$ erreicht werden kann.



Satz

- Eine Markierung m ist genau dann überdeckbar in einem S/T-Netz N, wenn es im Überdeckungsgraphen ÜG(N) eine ω-Markierung m^* gibt, die m überdeckt.
- Eine Stelle s ist genau dann unbeschränkt in N, wenn es in ÜG(N) eine ω-Markierung m^* mit $m^*(s) = \omega$ gibt.

Korollar

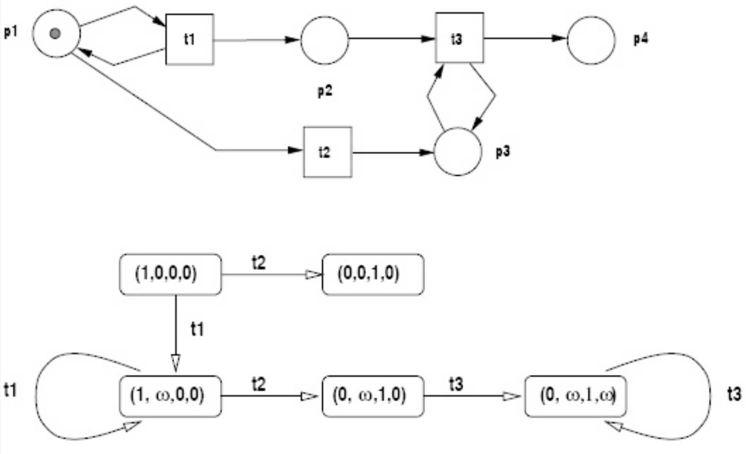
Wenn ein S/T-Netz beschränkt ist, dann stimmt sein Überdeckungsgraph mit seinem Erreichbarkeitsgraph überein.

simultan unbeschränkt

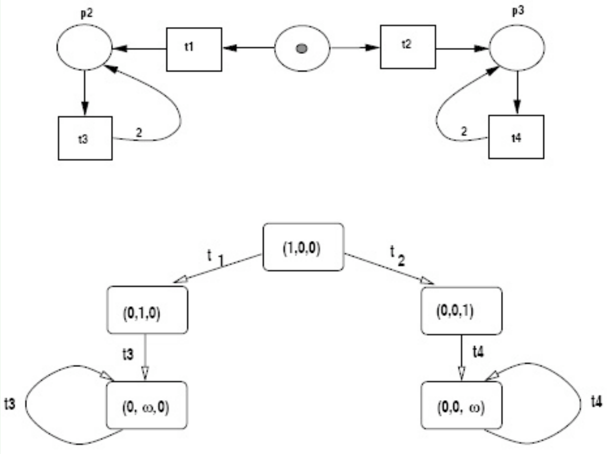
Eine Stellenmenge $Q \subseteq S$ heißt *simultan unbeschränkt* in N, wenn in N zu jedem $k \in NAT$ eine Markierung m_k erreichbar ist mit $m_k(s) > k$ für alle s aus Q.

Eine Stellenmenge $Q \subseteq S$ ist genau dann simultan unbeschränkt in N, wenn in ÜG(N) ein Knoten m existiert mit $m(s) = \omega$ für alle $s \in Q$.

Die Stellen s_2, s_4 sind simultan unbeschränkt.



Die Stellen s_2, s_3 sind unbeschränkt, jedoch nicht simultan unbeschränkt.

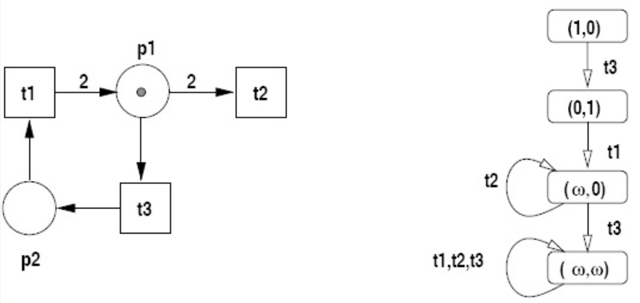


Lebendigkeit

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz.

- Eine Markierung m von S heißt *tot* in N, wenn kein $t \in T$ bei m Konzession hat.
- Eine Transition t von N heißt *tot bei der Markierung* m in N, wenn von m aus keine Markierung erreichbar ist, bei der t Konzession hat.
  Wenn t tot bei m_0, dann heißt t tot in N.
- Eine Transition t von N wird *lebendig bei der Markierung* m in N genannt, wenn sie bei keiner von m aus erreichbaren Markierung tot ist. Falls $m = m_0$, so heißt t *lebendig in* N.
- Eine Markierung m von S wird *lebendig in* N genannt, wenn alle Transitionen $t \in T$ lebendig bei m in N sind. Falls $m = m_0$ so heißt N *lebendig*.
- N heißt *verklemmungsfrei*, wenn in N keine tote Markierung erreichbar ist.

Durch Schalten des Wortes $t_3 t_1 t_2$ kann die tote Markierung $(0, 0)$ erreicht werden. Im Überdeckungsgraphen findet sich hierzu kein Indiz!



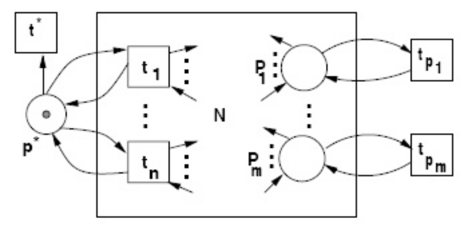
Lebendigkeit eines Netzes kann nicht mittels des Überdeckungssgraphen getestet werden.

Satz

Das 0-Erreichbarkeitsproblem kann auf das Problem der Nicht-Verklemmungsfreiheit reduziert werden.

Beweis: Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$.
Sei $N^* = (S^*, T^*, F^*, V^*, m_0^*)$ ein zu N wie folgt konstruiertes S/T-Netz:

- $S^* = S \cup \{s^*\}$, $T^* = T \cup \{t^*\} \cup \{t_{s_i} \mid 1 \leq i \leq m\}$,
- $m_0^*(s^*) = 1$ und m_0^* sonst wie m_0.



Es gilt dann: $0 \in R_N(m_0)$ genau dann, wenn N^* nicht verklemmungsfrei.[2]

[2]Beachte, daß ohne s^* das Vorliegen einer Nullmarkierung nicht notwendigerweise eine Verklemmung impliziert.

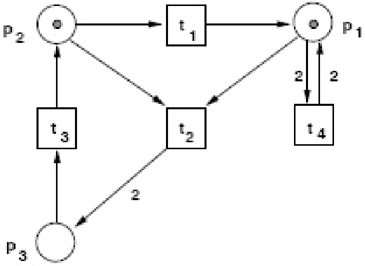
Invarianten von S/T-Netzen

Grundlagen

- Unter einer Invariante eines S/T-Netzes verstehet man eine Eigenschaft, die unabhängig von konkreten dynamischen Abläufen (Transitionsworten, Markierungen) ist.
- Einige invariante Eigenschaften lassen sich als Lösungen linearer Gleichungssysteme berechnen. Voraussetzung sind S/T-Netze ohne weitere Einschränkungen, wie Kapazitäten, Prioritäten, o.ä.

- Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$, $n, m \geq 1$.
- Für $t \in T$ kann Δt als n-dimensionaler Spaltenvektor betrachtet werden.
- Die *Akzidenzmatrix (Inzidenzmatrix)* von N ist die $m \times n$-Matrix $C = (\Delta t_1, \dots, \Delta t_n)$, bzw. $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, wobei $c_{ij} := \Delta t_j(s_i)$.

S/T-Netz mit Akzidenzmatrix



$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Akzidenzmatrizen sind unabhängig von Markierungen,
- Transitionen mit einer Schleife bzgl. einer Stelle, die gleichviel verbraucht wie erzeugt, können nicht von mit dieser Stelle nicht verbundenen Transitionen unterschieden werden.

Die Transponierte eines Vektors x, bzw. einer Matrix C bezeichnen wir (wie üblich) mit $x^\top$, bzw. $C^\top$.
Für jedes Wort $q \in W(T)$ sei $\bar{q}$ definiert wie folgt:

$$\bar{q} : T \to NAT, \textit{ wobei } \bar{q}(t) \textit{ gerade die Anzahl des Vorkommens von } t \textit{ in } q.$$

$\bar{q}$ ist der *Parikh-Vektor* von q. Parikh-Vektoren werden als Spaltenvektoren geschrieben.

Korollar

Sei $q \in W(T)$ und seien m, m' Markierungen.

Wenn $m[\,q\succ m'$, dann

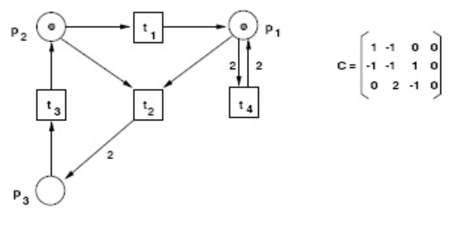
- $\sum_{t \in T} (\bar{q}(t) \cdot \Delta t) = C \cdot \bar{q} = \Delta q$.
- $m' = m + \Delta q^{\top}$.
  Die Gleichung:
  $$m' = m + (C \cdot \bar{q})^{\top}$$
  bezeichnet man als *Zustandsgleichung*.
- Das LGS $C \cdot x = (m' - m)^{\top}$ hat eine ganzzahlige Lösung x mit nichtnegativen Komponenten.

im Allgemeinen falsche Aussage

Wenn $C \cdot x = (m' - m)^\top$ eine ganzzahlige Lösung x mit nichtnegativen Komponenten hat, dann

$$\exists q \in W(T) : m[\, q \succ m',$$

Beispiel



Seien $m = (1, 0, 0)$, $m' = (0, 0, 1)$.
$x = (0, 1, 1, 0)^\top$ ist Lösung von $C \cdot x = (m' - m)^\top$, jedoch kann kein Wort gebildet aus t_2, t_3 bei m stattfinden.

Satz

Sei N ein S/T-Netz und sei Δ ein S-Vektor. Es existiert eine Markierung m^* und ein Wort $q \in W(T)$, so dass $m^*[\,q\succ(m^* + \Delta)$, genau dann, wenn $C \cdot x = \Delta^\top$ eine ganzzahlige Lösung mit nichtnegativen Komponenten hat.

Beweis:

"$\Rightarrow$": klar.

"$\Leftarrow$": Man setze z.B. $m^* := \sum_{t \in T} x(t) \cdot t^-$.

Korollar

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Es existiert genau dann eine Markierung m^* so dass $N = (S, T, F, V, m^*)$ unbeschränkt, wenn $C \cdot x > 0$ eine ganzzahlige Lösung mit nichtnegativen Komponenten hat.

Hat $C \cdot x > 0$ keine ganzzahlige Lösung mit nichtnegativen Komponenten, dann ist N für jede Anfangsmarkierung beschränkt.

Transitionsinvarianten

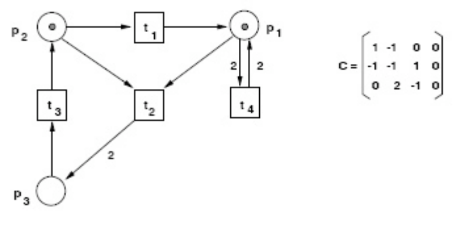
Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz.

- Jede nichttriviale ganzzahlige Lösung x des homogenen linearen Gleichungssystem $C \cdot x = 0$ heißt *Transitionsinvariante (T-Invariante)* von N.
- Eine T-Invariante x heißt *echte T-Invariante*, wenn $x \geq 0$.
- Eine T-Invariante x heißt *realisierbar* in N, wenn ein Wort $q \in W(T)$ mit $\bar{q} = x$ und eine erreichbare Markierung m mit $m[\, q \succ m$ existiert.
- N heißt mit *T-Invarianten überdeckt*, wenn es eine T-Invariante x besitzt, die in allen Komponenten positiv ist.

Echte T-Invarianten benennen *mögliche* Zyklen im Erreichbarkeitsgraphen; realisierbare T-Invarianten tatsächlich vorhandene.

Beispiel

Die T-Invarianten zu



ergeben sich wie folgt:

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei λ_1, λ_2 ganze Zahlen.

Satz

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Wenn eine Markierung m existiert, so dass N lebendig und beschränkt bei m, dann ist N von T-Invarianten überdeckt.

Beweis: Sei N lebendig und beschränkt bei m. Es existiert somit ein Wort $q_1 \in L_N(m)$, in dem alle Transitionen vorkommen.
Die Markierung $m + \Delta q_1$ ist von m aus erreichbar. Desweiteren ist N auch bei $m + \Delta q_1$ lebendig. Damit existiert ein $q_2 \in L_N(m)$, in dem entsprechend alle Transitionen vorkommen und ebenfalls ist N in $m + \Delta q_1 q_2$ lebendig.
Es existiert also eine unendliche Folge (m_i) von Markierungen, wobei $m_i := m + \Delta q_1 \ldots q_i$, so daß gilt:

$$m[\, q_1 \succ m_1 [\, q_2 \succ m_2 \ldots m_i [\, q_{i+1} \succ m_{i+1} \ldots$$

Da N bei m beschränkt, sind von m aus nur endlich viele unterschiedliche Markierungen aus erreichbar. Also existieren $i, j \in NAT : i < j$ und $m_i = m_j$. Damit gilt

$$m_i [\, q_{i+1} \ldots q_j \succ m_j = m_i$$

und

$$x = \bar{q}_{i+1} + \ldots + \bar{q}_j$$

ist T-Invariante und überdeckt N.

Ist N nicht mit T-Invarianten überdeckt, dann ist für jede Markierung N nicht lebendig oder nicht beschränkt.

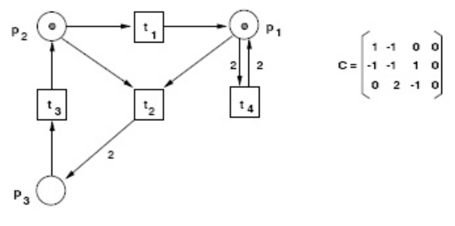
Stelleninvarianten

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz.

- Jede nichttriviale ganzzahlige Lösung y des homogenen linearen Gleichungssystem $y \cdot C = 0$ heißt *Stelleninvariante (S-Invariante)* von N.
- Eine S-Invariante y heißt *echte S-Invariante*, wenn $y \geq 0$.
- N heißt mit *S-Invarianten überdeckt*, wenn es eine S-Invariante y besitzt, die in allen Komponenten positiv ist.

Bei einer S-Invarianten y ist die Summe der mit $y(s)$ *gewichteten* Markenanzahlen der einzelnen Stellen $s \in S$ invariant gegenüber dem Schalten jeder einzelnen Transition.

Beispiel



Die S-Invarianten ergeben sich wie folgt:

$$y^T = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei λ eine ganze Zahl.

Satz

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz und sei y S-Invariante von N. Dann gilt:

$$m \in R_N(m_0) \Rightarrow y \cdot m^\top = y \cdot m_0^\top.$$

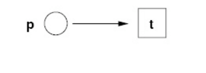
Beweis:
Gelte $m_0[\, q \succ m$. Dann folgt $m = m_0 + (C \cdot \bar{q})^\top$ und weiter:

$$y \cdot m^\top = y \cdot m_0^\top + y \cdot (C \cdot \bar{q}) = y \cdot m_0^\top + (y \cdot C) \cdot \bar{q} = y \cdot m_0^\top + 0 \cdot \bar{q} = y \cdot m_0^\top.$$

Korollar

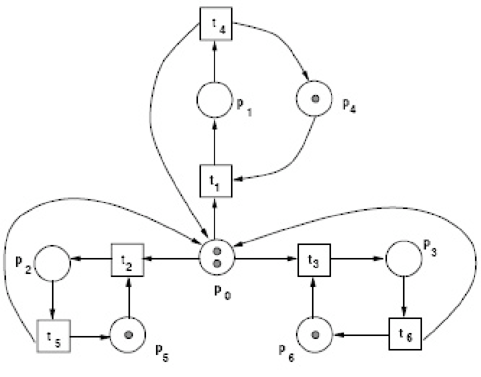
- Sei y S-Invariante von N, m Markierung. $y \cdot m^\top \neq y \cdot m_0^\top \Rightarrow m \notin R_N(m_0)$.
- Sei y echte S-Invariante von N. Sei $s \in S$, wobei $y(s) > 0$. s ist dann bei jeder Anfangsmarkierung beschränkt. (Gilt wegen:
  $y \cdot m_0^\top = y \cdot m^\top \geq y(s) \cdot m(s) \geq m(s)$.)
- Sei N durch S-Invarianten überdeckt. N ist bei jeder beliebigen Anfangsmarkierung beschränkt.

Die Umkehrung zur letzten Aussage gilt nicht. Das folgende Netz ist beschränkt, besitzt jedoch keine S-Invariante:



S-Invarianten erlauben hinreichende Tests für Nichterreichbarkeit und Beschränktheit.

Analyse mit S-Invarianten



$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

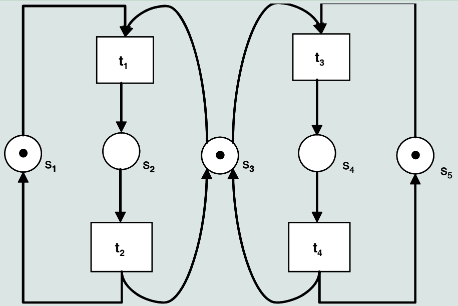
Es existieren die folgenden S-Invarianten:

$Y_1 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$
$Y_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
$Y_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$
$Y_4 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$

Man weise Verklemmungsfreiheit nach. Die Startmarkierung sei $m_0 = (2, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Angenommen es existiert eine Verklemmung, d.h. es existiert eine tote Markierung m, $m_0[\, q \succ m$. Dann muss zunächst $m(s_1) = m(s_2) = m(s_3) = 0$ gelten. Wegen Y_4 gilt $m(s_0) = 2$. Da m tot muss somit $m(s_4) = m(s_5) = m(s_6) = 0$. Dies ergibt einen Widerspruch zu $Y_1 m_0 = Y_1 m$.

Übungsaufgabe

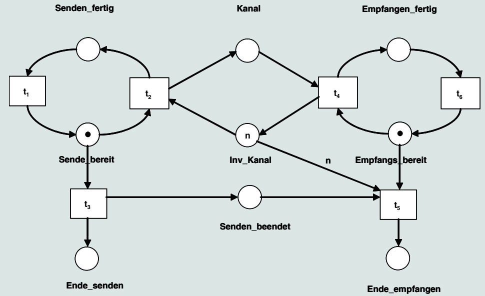
Das folgende S/T-Netz modelliert eine Variante der Reader/Writer-Synchronisation.



Weisen Sie unter Verwendung von S-Invarianten die Beschränktheit des Netzes nach.

Übungsaufgabe

Das folgende S/T-Netz modelliert ein spezielles Protokoll der Nachrichtenübertragung.



Die folgenden Eigenschaften sollen nachgewiesen werden:

- *Es können höchstens n Nachrichten gleichzeitig übertragen werden.*
- *Der Sender ist entweder im Endzustand, fertig oder bereit.*
- *Der Empfänger ist entweder im Endzustand, fertig oder bereit.*
- *Der Endzustand des Empfängers ist nur dann erreichbar, wenn der Kanal leer und der Sender seinen Endzustand erreicht hat.*

Formalisieren Sie zunächst diese Eigenschaften und beweisen Sie sie anschließend.

Formalisierung

- Es können höchstens n Nachrichten gleichzeitig übertragen werden.

  Die Stelle *Kanal* ist n-beschränkt.

- Der Sender ist entweder im Endzustand, fertig oder bereit.

  Es existiert eine S-Invariante der Form $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

- Der Empfänger ist entweder im Endzustand, fertig oder bereit.

  Es existiert eine S-Invariante der Form $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$.

- Der Endzustand des Empfängers ist nur dann erreichbar, wenn der Kanal leer und der Sender seinen Endzustand erreicht hat.

  Für alle $m \in R_N(m_0)$ gilt:
  t_5 hat Konzession bei $m \Rightarrow m(Kanal) = 0$ und $m(Ende\_senden) = 1$.

formaler Nachweis

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	i_1	i_2	i_3	i_4	m_0
Senden_fertig	-1	1							1	1	
Senden_bereit	1	-1	-1						1	1	1
Ende_Senden			1							1	
Senden_beendet			1		-1				1		
Empfangen_fertig				1		-1	1				
Empfangen_bereit				-1	-1	1	1				1
Ende_Empfangen					1		1	n	1		
Kanal		1		-1				1			
Inv_Kanal		-1		1	$-n$			1			n

Begründung

- wegen i_2.
- wegen i_4.
- wegen i_1.
- wegen i_2, i_3, i_4.

Varianten von S/T-Netzen

Kann das Verhalten eines beliebigen Netzes eines Typs durch ein Netz eines "anders/einfacher" strukturierten Netztyps simuliert werden?

Ein *Netztyp* ist gegeben, wenn folgende Festlegungen getroffen sind:

- die Art der Marken (z.B. ununterscheidbar, farbig, strukturiert, ...),
- die Art der Beschriftungen der Netzelemente (z.B. Vielfachheiten für Kanten, Schaltausdrücke für Transitionen, ...),
- Die Art der Bewertungen von Netzelementen (z.B. Kapazitäten für Stellen, Prioritäten für Transitionen, ...),
- die Schaltregel,
- die Schaltstrategie.

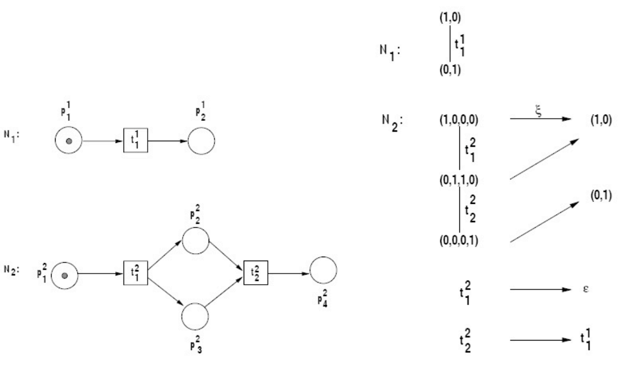
Fragen der Simulierbarkeit sind insbesondere dann interessant, wenn für die Analyse von Netzen Verfahren zur Verfügung stehen, die nur für spezielle Typen anwendbar sind.

Ein Netztyp $\mathcal{N}_1$ heißt *simulierbar* durch einen Netztyp $\mathcal{N}_2$, wenn zu jedem Netz $N_1 = (S_1, T_1, F_1, V_1, m_0^{(1)})$ vom Typ $\mathcal{N}_1$ ein Netz $N_2 = (S_2, T_2, F_2, V_2, m_0^{(2)})$ vom Typ $\mathcal{N}_2$, eine eindeutige Abbildung ξ (die *Zustandsübersetzung*) und eine eindeutige Abbildung τ (die *Transitionsübersetzung*) konstruiert werden kann, so daß gilt:

- ξ: $R_{N_2}(m_0^{(2)}) \longrightarrow R_{N_1}(m_0^{(1)})$, wobei $\xi(m_0^{(2)}) = m_0^{(1)}$.
- τ: $T_2 \longrightarrow T_1 \cup \{\epsilon\}$, wobei ϵ das leere Wort.
- Wenn (in N_2) $m_2, m_2' \in R_{N_2}(m_0^{(2)}), q \in W(T_2)$ und $m_2[\, q \succ m_2'$, dann gilt (in N_1) $\xi(m_2)[\, \tau(q) \succ \xi(m_2')$.
- Wenn (in N_1) $m_1, m_1' \in R_{N_1}(m_0^{(1)}), q \in W(T_1)$ und $m_1[\, q \succ m_1'$, dann existieren (in N_2) $m_2, m_2' \in R_{N_2}(m_0^{(2)})$, $q' \in W(T_2)$, wobei $m_1 = \xi(m_2)$, $q = \tau(q')$, $m_2[\, q' \succ m_2'$, $m_1' = \xi(m_2')$.

Ist ξ bijektiv, so redet man von der *Simulierbarkeit des Zustandsverhaltens*. Falls $\mathcal{N}_1$ simulierbar durch $\mathcal{N}_2$ und $\mathcal{N}_2$ simulierbar durch $\mathcal{N}_1$, so heißen die beiden Netztypen *äquivalent*.

Beispiel


N1:
p11
t11
p12
N2:
p21
t21
p22
p23
t22
p24
(1,0)
t11
(0,1)
(1,0,0,0)
t21
(0,1,1,0)
t22
(0,0,0,1)
ξ
(1,0)
(0,1)
t21
ε
t22
t11

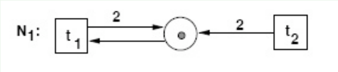
Satz

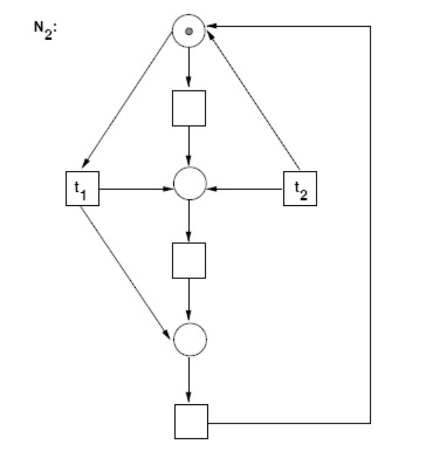
S/T-Netze und schleifenfreie, gewöhnliche Petri-Netze sind äquivalent.

Es genügt, die Simulierbarkeit von S/T-Netzen durch schleifenfreie, gewöhnliche S/T-Netze nachzuweisen.

- Sei $in(s)/out(s)$ die maximale Vielfachheit der Eingangs-/ Ausgangskanten einer Stelle s.
- Ersetze s durch einen Ring von Stellen und Transitionen, der aus $in(s) + out(s)$ Stellen besteht.
- Die Eingangs- und Ausgangskanten von s werden auf die neuen Stellen verteilt - eine Kante mit Vielfachheit k wird durch k Kanten mit Vielfachheit 1 zu den neuen Stellen ersetzt.

Simulation eines S/T-Netzes durch ein schleifenfreies, gewöhnliches S/T-Netz





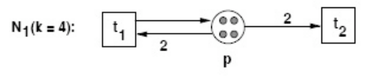
Satz

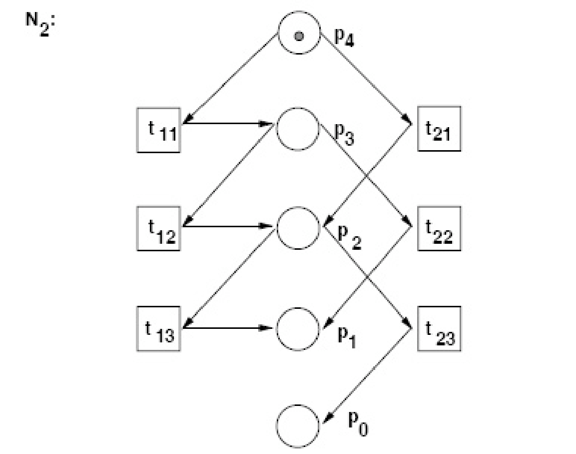
Beschränkte und sichere S/T-Netze sind äquivalent.

Es genügt, die Simulierbarkeit von beschränkten S/T-Netzen durch sichere S/T-Netze nachzuweisen.

- Sei s ein k-beschränkter Stelle.
- Spalte s in $k+1$ Stellen $s_0, s_1, \ldots, s_k$ auf. Jede Stelle s_i repräsentiert die Belegung von s mit i Marken, $0 \leq i \leq k$.
- Spalte jede mit s verbundene Transition t in k Transitionen $t_1, \ldots, t_k$ auf. Die einzelnen t_j, $1 \leq j \leq k$ werden so mit den s_i, $0 \leq i \leq k$ verbunden, dass alle bzgl. t möglichen Übergänge der Belegung von s ausgedrückt werden. Isoliert bleibende Transitionen t_j werden wieder entfernt.

Simulation eines beschränkten S/T-Netzes durch ein sicheres S/T-Netz.





S/T-Netze mit Kapazitäten

Markierungen von Stellen können beliebig groß werden.

- Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz, c eine ω-Markierung von S und sei $m_0 \leq c$. (N, c) bezeichnet man als *S/T-Netz mit Kapazitäten*. Sei $s \in S$. $c(s)$ ist dann die *Kapazität* von s.
- Für S/T-Netze mit Kapazitäten muss der Begriff der Konzession entsprechend angepaßt werden:

  eine Transition $t \in T$ *hat* Konzession bei einer Markierung m,
  wenn $t^- \leq m$ *und* $m + \Delta t \leq c$.

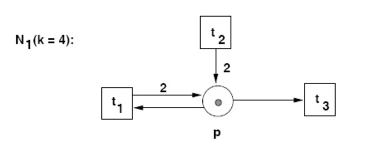
- In graphischen Darstellungen werden die Stellen mit ihren Kapazitäten beschriftet; keine Angabe steht für die Kapazität ω.

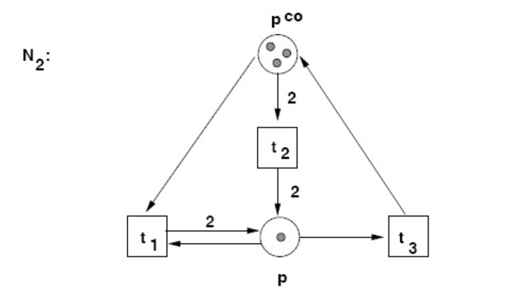
Satz

Jedes S/T-Netz mit Kapazitäten kann durch ein S/T-Netz ohne Kapazitäten simuliert werden.

- Sei s eine Stelle mit endlicher Kapazität $k = c(s)$. Sei s^{co} die zu s komplementäre Stelle mit Anfangsmarkierung $k - m_0(s)$.
- Wenn t eine Transition mit $\Delta t(s) > 0$ ist, dann füge eine Kante mit Vielfachheit $\Delta t(s)$ von s^{co} nach t ein;
  ist $\Delta t(s) < 0$, dann füge eine Kante von t nach s^{co} mit Vielfachheit $-\Delta t(s)$ ein.

Simulation eines beschränkten S/T-Netzes durch ein sicheres S/T-Netz.





Erweiterte S/T-Netze

Warum Erweiterungen?

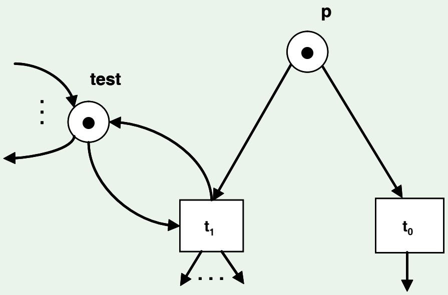
- S/T-Netze können nicht auf bestimmte Markierungen testen, z.B. die Nullmarkierung.
- S/T-Netze können keine Turing-Maschine simulieren.
- S/T-Netze haben keinen Zeitbegriff.
- Problemstellungen aus der Praxis führen unter Umständen zu sehr großen und unübersichtlichen Netzen.

einige Erweiterungen

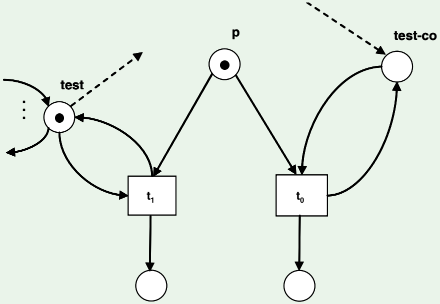
- S/T-Netze mit Prioritäten,
- S/T-Netze mit Inhibitor-Kanten,
- S/T-Netze mit Zeitbegriffen,
- Netze mit unterscheidbaren Marken.

S/T-Netze können nicht auf Markenfreiheit testen

Wie kann erreicht werden, daß, wenn t_0 schaltet, t_1 gerade keine Konzession hat, d.h. $m(test) = 0$?



S/T-Netze mit (endl.) Kapazitäten können auf Markenfreiheit testen



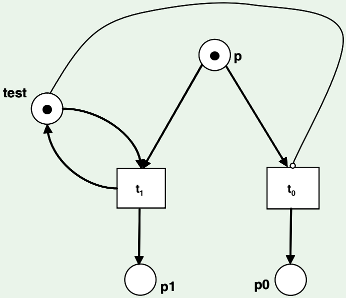
S/T-Netze mit Prioritäten können auf Markenfreiheit testen

Sei auf der Menge der Transitionen eine partielle Ordnung $\ll$ definiert. Haben Transitionen t_1, t_2 gleichzeitig Konzession, so schaltet t_1, sofern $t_2 \ll t_1$.
Wähle im vorangehenden Beispiel $t_0 \ll t_1$.

S/T-Netze mit Inhibitor-Kanten

- Inhibitor-Kanten *verbieten* das Schalten einer Transition in Abhängigkeit von gewissen Markierungen ihrer Vorstellen.
- Gelte für die Vielfachheit einer Kante (s, t) $V(s, t) = -k$, $k \in NAT$ und bzgl. einer Markierung m gerade $m(s) \geq k$. Die Transition t darf dann *nicht* schalten, auch wenn sie ansonsten Konzession hat.
- Petri-Netze mit Inhibitor-Kanten sind Turing-mächtig.

Test auf Markenfreiheit mittels einer Inhibitor-Kante



S/T-Netze mit Zeitbegriffen

Literatur: *Petri-Netze: Grundlagen und Anwendungen*, Baumgarten, B.I. Wissenschaftsverlag 1990.

- S/T-Netze bisher haben einen *qualitativen* (vorher/nachher) und *impliziten* (Kausalität) *Zeitbegriff*.
- Für einen *expliziten* Zeitbegriff können Netzkonstrukte (im Wesentlichen Stellen, Kanten, Transitionen) mit deterministischen *Zeitattributen*:

  > frühester/spätester Zeitpunkt, Mindestdauer, Höchstdauer, exakter Zeitpunkt/Dauer, ...

  oder auch stochastischen Größen versehen werden.
- Zeiträume in Stellen: i.a. Mindestverweildauern,
  Zeiträume in Transitionen: Schaltdauern.

Gefärbte Petri-Netze

- Problemstellungen aus der Praxis führen unter Umständen zu sehr großen und unübersichtlichen Petri-Netzen.
- Häufig enthalten solche Netze gewisse Regelmäßigkeiten, zum Teil sogar zueinander isomorphe Teilnetze.

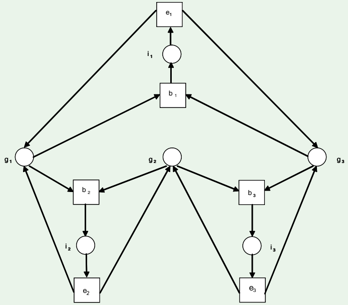
Kann die Größe eines Netzes so reduziert werden, dass nach wie vor derselbe Realweltzusammenhang modelliert wird?

Isomorphie

Seien $N_1 = (S_1, T_1, F_1)$, $N_2 = (S_2, T_2, F_2)$ zwei Netze. $X_i = S_i \cup T_i, i \in \{1, 2\}$.
N_1, N_2 heißen *isomorph*, wenn eine bijektive Abbildung $g : X_1 \to X_2$ existiert:

- $(x, y) \in F_1 \cap S_1 \times T_1 \Rightarrow (g(x), g(y)) \in F_2 \cap S_2 \times T_2$,
- $(x, y) \in F_1 \cap T_1 \times S_1 \Rightarrow (g(x), g(y)) \in F_2 \cap T_2 \times S_2$.
- $(x, y) \in F_1 \Leftrightarrow (g(x), g(y)) \in F_2$.

Isomorphe Teilnetze?



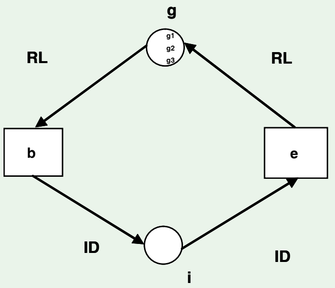
Grundlagen

Gefärbte Petri-Netze haben im Unterschied zu den bisherigen S/T-Netzen verschiedene Sorten von Marken und Kantenbeschriftungen mit Funktionen.

- Information, die in S/T-Netzen in Transitionen und Stellen steckt, kann in gefärbten Petri-Netzen in Beschriftungen der Netzelemente übernommen werden. In dieser Weise kann die Größe der Netze reduziert werden.
- Der Formalismus gefärbter Petri-Netze greift auf Multimengen zurück. Im Unterschied zu einer üblichen Menge kann eine Multimenge mehrere (identische) Kopien der einzelnen Elemente enthalten.
- Sei A eine beliebige Menge. Eine *Multimenge* m über A ist eine Abbildung $m : A \rightarrow NAT$. Für $a \in A$ bedeutet $m[a] = k$ daß a in m k-mal vorkommt.
- Multimengen werden häufig als Vektoren, oder durch formale Summen dargestellt.

  Die Multimenge $[Apfel, Apfel, Birne]$ entspricht der formalen Summe $2 \cdot Apfel + 1 \cdot Birne$.

gefärbte Lösung des 3-Philosophen-Problems



Färbung C

$$\left.\begin{array}{ll} C(g) = & \{g_1, g_2, g_3\} \\ C(i) = & \{ph_1, ph_2, ph_3\} \end{array}\right\} \text{Markensorten / Stellenfarben}$$

$$\left.\begin{array}{ll} C(b) = & \{ph_1, ph_2, ph_3\} \\ C(e) = & \{ph_1, ph_2, ph_3\} \end{array}\right\} \text{Schaltmodi / Transitionsfarben}$$

Vielfachheiten

Eine Vielfachheit ist eine einer Kante zugeordnete Abbildung von der Menge der Farben der beteiligten Transition in die Menge der Multimengen über der Menge von Farben der beteiligten Stelle.

$$V(b,i) = V(i,e) = ID, \;\; V(g,b) = V(e,g) = RL,$$

wobei weiter:

$$\begin{aligned} ID(ph_j) &:= 1 \cdot ph_j, 1 \leq j \leq 3 \\ RL(ph_j) &:= \begin{cases} 1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_3 & \text{falls } j = 1, \\ 1 \cdot g_{j-1} + 1 \cdot g_j & \text{falls } j \in \{2,3\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit *ID* bezeichnen wir im folgenden immer die Identitätsabbildung.

Markierung

Stellen werden durch Multimengen über Stellenfarben belegt:

$$m_0(s) := \begin{cases} 1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + 1 \cdot g_3 & \text{falls } s = g, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Tupel $GN = (S, T, F, C, V, m_0)$ heißt *gefärbtes Netz*, wenn gilt:

- (S, T, F) ist ein Netz.
- C ist eine Abbildung, die jedem Knoten $x \in S \cup T$ eine endliche nicht leere Menge $C(x)$ von *Farben* zuordnet.
- V ist eine Abbildung, die jeder Kante $f \in F$ eine Abbildung $V(f)$ zuordnet. $V(f)$ ist eine Abbildung von $C(t)$ in die Menge aller Multimengen über $C(s)$.
  s ist hier die Stelle und t die Transition der Kante f.
- m_0 ist eine Abbildung, die jeder Stelle s eine Multimenge $m_0(s)$ über $C(s)$ zuordnet.

Sei $GN = (S, T, F, C, V, m_0)$ ein gefärbtes Petri-Netz.

- Eine Markierung m von S ist eine Abbildung, die jeder Stelle s eine Multimenge $m(s)$ über $C(s)$ zuordnet.
- Eine Transition t *hat Konzession in der Farbe* $d \in C(t)$ bei m, wenn für alle Vorstellen $s \in Ft$ gilt:

$$V(s,t)(d) \leq m(s).$$

- Durch Schalten von t in d entsteht die Markierung m':

$$m'(s) := \begin{cases} m(s) - V(s,t)(d) + V(t,s)(d) & \text{falls } s \in Ft, \\ & s \in tF, \\ m(s) - V(s,t)(d) & \text{falls } s \in Ft,, \\ & s \notin tF, \\ m(s) + V(t,s)(d) & \text{falls } s \notin Ft,, \\ & s \in tF, \\ m(s) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falten und Entfalten

Falten

Durch Falten eines S/T-Netzes in ein gefärbtes Petri-Netz können die Anzahl Stellen und Transitionen verringert werden. Stellen und Transitionen werden dabei Stellen- und Transitionsfarben, bzw. Beschriftungen von Kanten mit Funktionen.

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein S/T-Netz. Sei eine Faltung durch π und τ definiert:

- $\pi = \{q_1, \ldots, q_k\}$ eine (disjunkte) Zerlegung von S,
- $\tau = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine (disjunkte) Zerlegung von T.

Sei $GN(\pi, \tau) := (S', T', F', C', V', m'_0)$ das entsprechende gefaltete Netz.

Spezialfälle einer Faltung

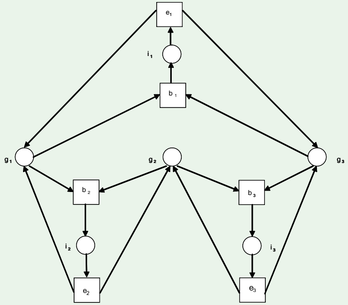
- π, τ enthalten jeweils nur 1-elementige Mengen:

$$\Rightarrow N \text{ und } GN(\pi, \tau) \text{ sind isomorph,}$$

- π, τ enthalten jeweils nur 1 Element:

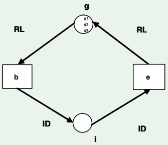
$$\Rightarrow |S'| = |T'| = 1, \text{"alles steckt in der Beschriftung".}$$

3-Philosophen-Problem



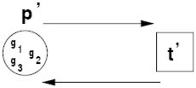
eine mögliche Faltung;

$C(g) = \{g_1, g_2, g_3\}$, $C(i) = \{ph_1, ph_2, ph_3\}$, $C(b) = \{ph_1, ph_2, ph_3\}$, $C(e) = \{ph_1, ph_2, ph_3\}$.



3-Philosophen-Problem?

$\pi = \{P\}$, $\tau = \{T\}$:
$S' = \{s'\}$, $T' = \{t'\}$,
$C(s') = \{g_1, g_2, g_3, i_1, i_2, i_3\}$,
$C(t') = \{b_1, b_2, b_3, e_1, e_2, e_3\}$,
$m_0'(s') = g_1 + g_2 + g_3$,



$$V'(s',t')(t) = \begin{cases} g_1 + g_3 & \textit{falls } t = b_1, \\ g_1 + g_2 & \textit{falls } t = b_2, \\ g_2 + g_3 & \textit{falls } t = b_3, \\ i_1 & \textit{falls } t = e_1, \\ i_2 & \textit{falls } t = e_2, \\ i_3 & \textit{falls } t = e_3, \end{cases} \qquad V'(t',s')(t) = \begin{cases} g_1 + g_3 & \textit{falls } t = e_1, \\ g_1 + g_2 & \textit{falls } t = e_2, \\ g_2 + g_3 & \textit{falls } t = e_3, \\ i_1 & \textit{falls } t = b_1, \\ i_2 & \textit{falls } t = b_2, \\ i_3 & \textit{falls } t = b_3. \end{cases}$$

$\pi = \{q_1, \ldots, q_k\}$, $\tau = \{u_1, \ldots, u_n\}$ definieren die *Faltung* $GN(\pi, \tau) := (S', T', F', C', V', m'_0)$ von N

- $S' := \{s'_1, \ldots, s'_k\}$; $T' := \{t'_1, \ldots, t'_n\}$,
- $C'(s'_i) = q_i$ für $i = 1, \ldots, k$; $C'(t'_j) = u_j$ für $j = 1, \ldots, n$,
- $F' := \begin{array}{l} \{(s', t') \mid C'(s') \times C'(t') \cap F \neq \emptyset\} \cup \\ \{(t', s') \mid C'(t') \times C'(s') \cap F \neq \emptyset\}, \end{array}$
- für $f' = (s', t') \in F'$ ist $V'(f')$ definiert wie folgt ($t \in C'(t')$):
$$V'(f')(t) = \sum_{s \in C'(s')} t^{-}(s) \cdot s,$$
- für $f' = (t', s') \in F'$ ist $V'(f')$ definiert wie folgt ($t \in C'(t')$):
$$V'(f')(t) = \sum_{s \in C'(s')} t^{+}(s) \cdot s,$$
- $m'_0(s') := \sum_{s \in C'(s')} m_0(s) \cdot s.$

Entfaltung

Sei $GN = (S, T, F, C, V, m_0)$ ein gefärbtes Petri-Netz.

Die *Entfaltung* von GN ist das S/T-Netz $GN^* := (S^*, T^*, F^*, V^*, m_0^*)$ definiert wie folgt:

- $S^* := \{(s, c) \mid s \in S, c \in C(s)\}$,
- $T^* := \{(t, d) \mid t \in T, d \in C(t)\}$,
- $$\begin{aligned} F^* := \ & \{((s,c),(t,d)) \mid (s,t) \in F, V(s,t)(d)[c] > 0\} \cup \\ & \{((t,d),(s,c)) \mid (t,s) \in F, V(t,s)(d)[c] > 0\}. \end{aligned}$$
- $V^*((s, c), (t, d)) := V(s, t)(d)[c]$,
- $V^*((t, d), (s, c)) := V(t, s)(d)[c]$,
- $m_0^*(s, c) := m_0(s)[c]$.

Korollar

- Sei N S/T-Netz mit einer Zerlegung π, τ. Die Entfaltung von $GN(\pi, \tau)$ ist isomorph zu N.
- Sei GN ein gefärbtes Petri-Netz mit einer Entfaltung GN^*. Seien bzgl. GN^* definiert:
  $$\pi := \{\{\{s\} \times C(s)\} \mid s \in S\},$$
  $$\tau := \{\{\{t\} \times C(t)\} \mid t \in T\}.$$
  Die Faltung von $GN^*(\pi, \tau)$ ist isomorph zu GN.

Korollar

Sei GN ein gefärbtes Petri-Netz mit Entfaltung GN^*.

Eine Transition t hat in GN bei der Markierung m Konzession in der Farbe d genau dann, wenn die Transition (t, d) in GN^* bei m^* Konzession hat.

Beweis

(1) t hat Konzession bei m in $d \Rightarrow \forall s \in Ft : V(s,t)(d) \leq m(s)$.

(2) (t, d) hat Konzession bei m^*
$\Rightarrow \forall (s,c) \in F^*(t,d) : V^*((s,c),(t,d)) \leq m^*(s,c)$.

(3) (1) $\Leftrightarrow$ (2) da GN^* Entfaltung von GN.

Definition

E sei eine Eigenschaft wie Beschränktheit, Lebendigkeit, oder auch Erreichbarkeit.

Ein gefärbtes Netz GN hat die Eigenschaft E, wenn die Entfaltung GN^* von GN die Eigenschaft E hat.

Analyse von gefärbten Netzen

- Analyse auf der Ebene der Entfaltungen wie für S/T-Netze:
  - Vorteil: Methoden vorhanden,
  - Nachteil: Entfaltungen sind u.U. sehr große Netze.
- Analyse auf der Ebene der gefärbten Netze:
  - Verallgemeinerung von Erreichbarkeits- und Überdeckungsgraphen relativ unproblematisch,
  - Es existiert eine Theorie für Invariantenberechnung.
  - Es existieren eine Reihe von Tools zur Simulation und Analyse.

Struktureigenschaften von Petri-Netzen

Struktur und Verhalten

Die Zusammenhänge zwischen Struktur und Verhalten eines Petri-Netzes werden untersucht. Es soll insbesondere die (lokale) Umgebung einer Stelle/Transition untersucht werden.

Trivial:

Ist für alle Spalten einer Akzidenzmatrix die Summe 0, dann ist das Netz bei jeder Anfangsmarkierung beschränkt.

O.B.d.A. alle Netze im Weiteren zusammenhängend.

$N = (S, T, F, V, m_0)$, $t \in T, s \in S$.

- Wenn t keine Nachstelle hat, dann ist t nicht lebendig in N oder alle Vorstellen von t sind unbeschränkt.
- Wenn s keine Nachtransition hat, dann ist s unbeschränkt oder alle seine Vortransitionen sind nicht lebendig.

Folgerung

Wenn N bezgl. einer Markierung m_0 lebendig und beschränkt, dann gilt für jeden Knoten x des Netzes $xF \neq \emptyset$ und $Fx \neq \emptyset$.

Satz

Wenn N bzgl. einer Markierung m_0 lebendig und beschränkt, dann ist N stark-zusammenhängend.

Beweis

Seien $x, y \in S \cup T$. Zu zeigen ist, dass es eine Folge von gerichteten Kanten $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ gibt, wobei $x = x_1$ und $y = x_n$. Da N zusammenhängend, existiert zumindest eine solche ungerichtete Folge.

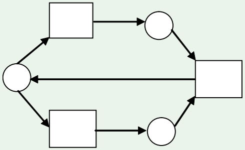
Wir zeigen, dass zu jeder Kante (y, x) eine gerichtete Folge von x nach y existiert.

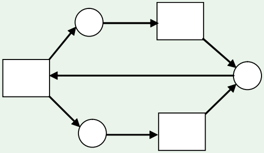
Angenommen dies gilt nicht. Sei $vor(y)$ die Menge aller Knoten, von denen eine gerichtete Folge von Kanten zu y existiert und $nach(x)$ die Menge der Knoten, zu denen eine gerichtete Folge ausgehend von x existiert. Offensichtlich $vor(y) \cap nach(x) = \emptyset$. Damit ist es nicht möglich, dass das Schalten einer Transition t aus $nach(x)$ eine Marke auf einen Platz in $vor(y)$ ablegt.

Wenn y Transition, dann x Stelle. Weil y lebendig, kann y immer wieder geschaltet werden, ohne dass die auf x abgelegten Marken verringert werden müssen. Also ist x nicht beschränkt, ein Widerspruch.

Wenn y Stelle, dann x eine lebendige Transition. Stelle y muss also immer wieder Marken erhalten, ohne dass die von x erzeugten Marken abfließen müssen. Also ist y nicht beschränkt, ein Widerspruch.

Stark-zusammenhängende Netze, die nicht lebendig, oder nicht beschränkt.





Netzklassen

Sei $N = (S, T, F, V, m_0)$.

- N heißt *Synchronisationsgraph*, wenn jede Stelle s genau eine Vortransition und genau eine Nachtransition besitzt.
- N heißt *Zustandsmaschine*, wenn jede Transition t genau eine Vorstelle und genau eine Nachstelle besitzt.
- N heißt *Free-Choice-Netz (FC-Netz)*, wenn jede geteilte Stelle die einzige Vorstelle seiner Nachtransitionen ist, d.h. $t, t' \in sF \Rightarrow Ft = \{s\} = Ft'$.
- N heißt *Extended-Free-Choice-Netz (EFC-Netz)*, wenn die Nachtransitionen geteilter Stellen dieselben Vorstellen haben, d.h. $t, t' \in sF \Rightarrow Ft = Ft'$.

Folgerung

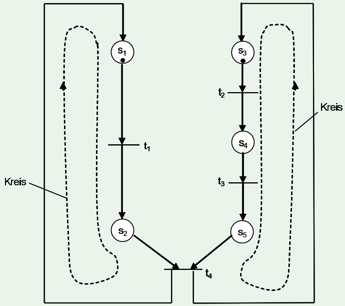
- Jeder Synchronisationsgraph ist ein FC-Netz.
- Jede Zustandsmaschine ein FC-Netz.
- Jedes FC-Netz ist ein EFC-Netz.

Bemerkungen

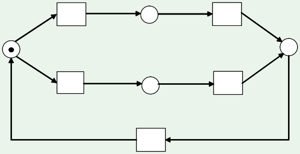
- Synchronisationsgraphen sind konfliktfreie Netze.
- Gewöhnliche Zustandsmaschinen sind beschränkt - die Anzahl Marken im Netz ist invariant bezüglich dem Schalten einer Transition.

  Gewöhnliche Zustandsmaschinen mit einer Marke erlauben keine Nebenläufigkeit.

lebendiger Synchronisationsgraph



lebendige Zustandsmaschine



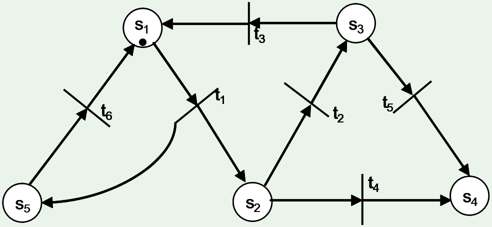
Satz

Ein gewöhnlicher Synchronisationsgraph N ist lebendig genau dann, wenn jeder elementare Kreis von N bei der Anfangsmarkierung markiert ist.

Satz

Eine gewöhnliche Zustandsmaschine ist lebendig genau dann, wenn sie stark-zusammenhängend ist und wenigstens eine Marke enthält.

Lebendiges FC-Netz.



Satz

Sei N ein homogenes EFC-Netz mit nicht-blockierender Vielfachheit.

Genau dann ist N lebendig, wenn N die Deadlock-Falle Eigenschaft besitzt.

Begriffe *homogen, Deadlock-Falle* und Beweis s. P.H. Starke, Analyse von Petri-Netz Modellen.

Workflow-Netze

Literatur und Abbildungen:

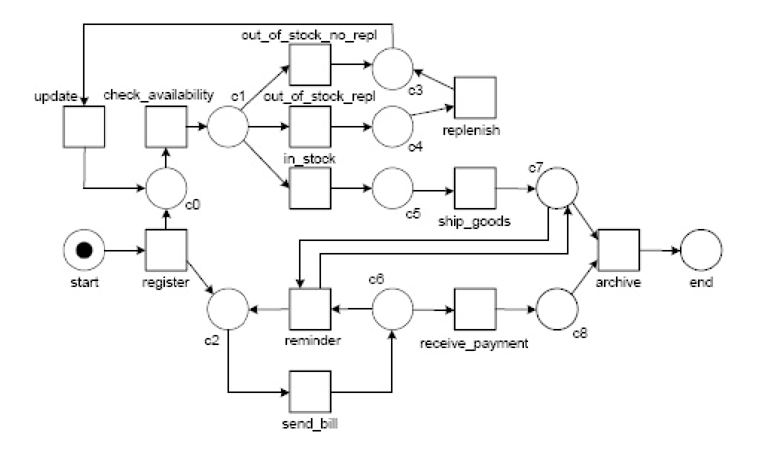
van der Aalst, Hofstede: http://is.tm.tue.nl/staff/wvdaalst/publications/p174.pdf

Workflow (WF)-Net

Ein Petri-Netz $N = (S, T, F)$ ist ein WF-Netz, wenn

- Es existiert eine *Eingabestelle* $i \in S$ mit $Fi = \emptyset$.
- Es existiert eine *Ausgabestelle* $o \in S$ mit $oF = \emptyset$.
- Jeder *Knoten* $x \in S \cup T$ ist Teil eines (gerichteten) Pfades von i nach o.

Beispiel: WF-net order handling



Eigenschaften von WF-Netzen

Sei $N = (S, T, F)$ ein WF-Netz mit Eingabestelle i und Ausgabestelle o.

- Für $s \in S$ gilt $Fs \neq \emptyset$ oder $s = i$.
- Für $s \in S$ gilt $sF \neq \emptyset$ oder $s = o$.
- Sei $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{F})$, wobei $\overline{S} = S$, $\overline{T} = T \cup \{t^*\}$ und $\overline{F} = F \cup \{(o, t^*), (t^*, i)\}$.

  $\overline{N}$ heißt *kurzgeschlossenes* Netz zu N.

  $\overline{N}$ ist stark zusammenhängend.

sound

Ein WF-Netz heißt *sound*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

Sei m_i die Eingabemarkierung, d.h. lediglich die Eingabestelle i ist markiert. Sei m_o die Ausgabemarkierung, d.h. lediglich die Ausgabestelle o ist markiert.

- Von jeder von m_i aus erreichbaren Markierung m ist m_o erreichbar.
- m_o ist die einzige von m_i aus erreichbare Markierung in der die Ausgabestelle o markiert ist.
- Das WF-Netz enthält keine toten Transitionen.

Satz

Ein WF-Netz N ist sound genau dann, wenn $(\overline{N}, m_i)$ lebendig und beschränkt.

Lemma

Ein WF-Netz N ist sound, wenn $(\overline{N}, m_i)$ lebendig und beschränkt.

Beweis

Da $(\overline{N}, m_i)$ lebendig existiert zu jeder erreichbaren Markierung m (inklusive der Startmarkierung m_i) eine Schaltfolge die zu einer Markierung m' führt in der t^* Konzession hat. Damit ist in m' die Ausgabestelle o markiert.

Betrachte eine beliebige von m_i erreichbare solche Markierung $m' = m'' + m_o$. In m' hat t^* Konzession. Somit ist die Markierung $m'' + m_i$ von m_i erreichbar. Da $(\overline{N}, m_i)$ beschränkt folgt $m'' = 0$.

Lemma

Wenn ein WF-Netz N sound ist, dann ist $(\overline{N}, m_i)$ beschränkt.

Beweis

Wir zeigen zunächst das (N, m_i) beschränkt. Angenommen (N, m_i) ist nicht beschränkt. Dann existieren Markierungen m_1, m_2, so dass $m_i[\,*\succ m_1$, $m_1[\,*\succ m_2$ und $m_2 > m_1$.

Da N sound gilt $m_1[\,q\succ m_o$. Des Weiteren existiert eine Markierung m mit $m_2[\,q\succ m$ und $m > m_o$. Dies ist ein Widerspruch zu N sound.

Aus N sound und (N, m_i) beschränkt folgt dann schließlich $(\overline{N}, m_i)$ beschränkt.

Lemma

Wenn ein WF-Netz N sound ist, dann ist $(\overline{N}, m_i)$ lebendig.

Beweis

Von jeder Markierung m', die in $(\overline{N}, m_i)$ erreichbar ist, ist wiederum m_i erreichbar. Da N keine toten Transitionen bzgl. m_i enthält folgt $(\overline{N}, m_i)$ lebendig.

well-formed

Ein Netz N ist well-formed, wenn eine Markierung m existiert, so dass (N, m) lebendig und beschränkt.

Ob ein FCN well-formed ist, kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Folgerung

Ist ein WF-Netz ein FCN, dann kann die Eigenschaft sound in polynomieller Zeit entschieden werden.

Definition

Sei $N = (T, S, F, V)$ und $x \in T \cup S$. $[x] \subseteq T \cup S$ heißt *Cluster* von N, wenn $[x]$ die kleinste Menge ist, so dass $x \in [x]$, $s \in [x] \Rightarrow sF \subseteq [x]$ und $t \in [x] \Rightarrow Ft \subseteq [x]$.

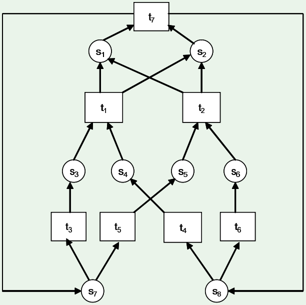
Rank Theorem

Ein EFC-Netz N ist well-formed genau dann, wenn

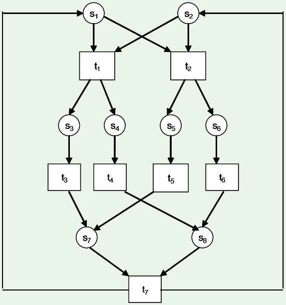
- N eine positive S-Invariante besitzt,
- N eine positive T-Invariante besitzt,
- die Anzahl seiner Cluster den Rang der Inzidenzmatrix um eins übersteigt.

Diese Eigenschaft kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Sind folgende FC-Netze well-formed?



FC-Netz 1 (?)



FC-Netz 2 (ja)